Nilai Mutlak

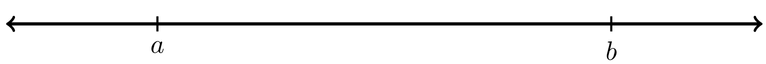
April 14, 2026

1 Urutan dan interval

Telah diketahui bahwa himpunan semua bilangan real dapat digambarkan dengan garis real. Dua titik berbeda pada garis real tentu selalu dapat diurutkan. Bilangan real a dikatakan lebih kecil dari bilangan b, dituliskan $a < b$ jika

$$b - a > 0.$$

Pada garis real, pernyataan $a < b$ berarti posisi a di sebelah kiri b. Pernyataan a lebih kecil dari b juga sama dengan pernyataan b lebih besar dari a, dan dituliskan $b > a$.



Gambar 1: $a < b$

Jika a dan b adalah bilangan real, maka satu dan hanya satu pernyataan berikut berlaku:

$$a < b, \qquad a = b, \qquad b < a$$

Contoh 1. (a) $1 < 5, \qquad -2 < 3, \qquad -\frac{1}{2} < 0,$ dan $-5 < 2$.

Notasi $a \leq b$ berarti $a < b$ atau $a = b$. Sebagai contoh, $2 \leq 3$ dan $3 \leq 3$. Notasi $a \leq b$ ekivalen (sama saja) dengan notasi $b \geq a$. Suatu ekspresi yang dihubungkan dengan tanda $<, >, \leq$ atau $\geq$ dinamakan **ketaksamaan**.

Contoh 2. (a) $\frac{1}{2} \leq 3$ dapat pula dituliskan dengan $3 \geq \frac{1}{2}$

(b) $-\frac{3}{4} > -\frac{7}{3}$ dapat pula dituliskan dengan $-\frac{7}{3} < -\frac{3}{4}$.

Teorema 1. *Diketahui a, b dan c bilangan real.*

i. *Jika $a < b$, maka $a + c < b + c$.*

ii. *Jika $a \leq b$ dan $c \geq 0$, maka $ac \leq bc$*

iii. *Jika $a < b$ dan $c < 0$, maka $ac > bc$*

Contoh 3. Dapat diperiksa kebenaran pernyataan berikut:

(a) Telah diketahui bahwa $-2 < 3$. Oleh karena itu jika kedua ruas ditambahkan dengan 5, maka $-2 + 5 < 3 + 5$ atau disederhakan menjadi $3 < 8$.

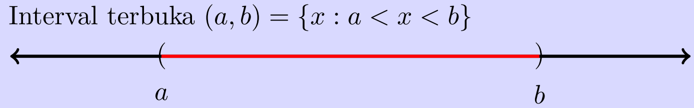
(b) Pada ketaksamaan $2 < 4$ jika kedua ruas dikalikan dengan 3, maka $2 \cdot 3 < 4 \cdot 3$ atau disederhakan menjadi $6 < 12$.

(c) Pada ketaksamaan $1 < 3$ jika kedua ruang dikalikan dengan -2, maka $1 \cdot (-2) > 3 \cdot (-2)$ atau disederhakan menjadi $-2 > -6$.

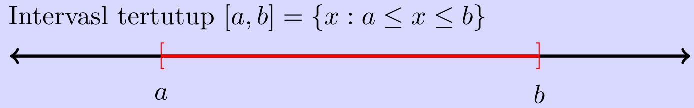
Interval

Interval atau selang adalah himpunan semua bilangan real yang terletak antara dua bilangan real. Jika $a < b$, maka bisa dibentuk beberapa jenis interval. Segmen garis berwana merah pada grafik di bawah setiap interval berikut, merupakan representasi inverval tersebut.

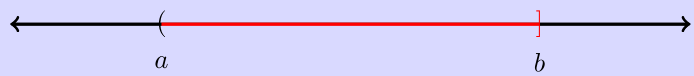
i. Interval terbuka $(a, b) = \{x : a < x < b\}$



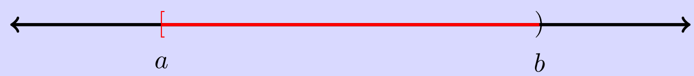
ii. Intervasl tertutup $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$



iii. Interval setengah terbuka $(a, b] = \{x : a < x \le b\}$



dan interval setengah terbuka $[a, b) = \{x : a \le x < b\}$



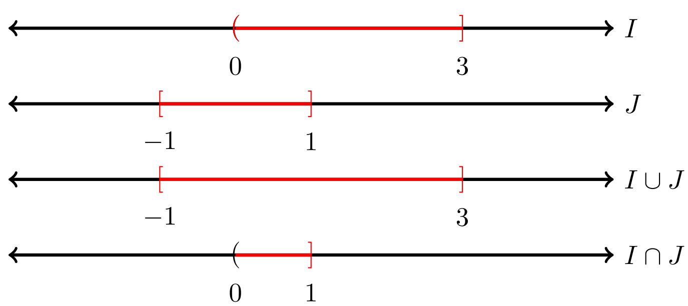
Contoh 4. Interval $(0, 1] = \{x : 0 < x \le 1\}$ menyatakan himpunan semua bilangan yang lebih besar dari 0 dan lebih kecil atau sama dengan 1.

Karena interval adalah himpunan, maka dapat dilakukan operasi himpunan pada interval.

Contoh 5. Diketahui interval-interval $I = (0, 3] = \{x : 0 < x \le 3\}$ dan $J = [-1, 1] = \{x : -1 \le x \le 1\}$. Dapat diperiksa bahwa

$$\begin{aligned} I \cup J &= \{x : -1 \le x \le 3\} = [-1, 3] \qquad \text{dan} \\ I \cap J &= \{x : 0 < x \le 1\} = (0, 1] \end{aligned}$$

Union dan irisan kedua interval digambarkan sebagai berikut.



Untuk pembahasan selanjutnya, perlu diperkenalkan dua notasi berikut. Suatu bilangan yang lebih besar dari bilangan real manapun dinamakan **tak hingga**, dituliskan ∞. Jadi

$$x < \infty \qquad \text{untuk sebarang bilangan real } x$$

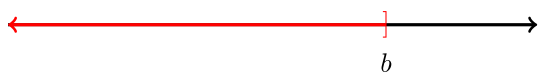
Bilangan yang lebih kecil dari bilangan real manapun dinamakan **minus tak hingga**, dituliskan $-\infty$. Jadi

$$-\infty < x \qquad \text{untuk sebarang bilangan real } x$$

Selanjutnya perlu diperkenalkan interval-interval yang terkait dengan tak hingga.

(1) Interval $[a, \infty) = \{x : a \leq x\}$

(2) Interval $(-\infty, b] = \{x : x \leq b\}$



(3) Interval $(a, \infty) = \{x : a < x\}$

(4) Interval $(-\infty, b) = \{x : x < b\}$

Contoh 6. (a) Interval $[1, \infty)$ menyatakan himpunan semua bilangan yang lebih besar atau sama dengan 1, yakni

$$[1, \infty) = \{x : 1 \leq x\},$$

atau digambarkan dengan

(b) Interval $(-\infty, \frac{1}{2})$ menyatakan himpunan semua bilangan yang lebih kecil $\frac{1}{2}$, yakni

$$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) = \left\{x : x < \frac{1}{2}\right\},$$

atau digambarkan dengan

Mencari penyelesaian ketaksamaan

Pencarian penyelesaian ketaksamaan dapat dikerjakan dengan cara merubah ketaksamaan sehingga ketaksamaan tersebut menjadi jelas yang dapat ditempuh dengan cara:

(1) Setiap ruas ditambahkan dengan bilangan yang sama.

(2) Setiap ruas dikalikan dengan bilangan positif yang sama.

(3) Setiap ruas dikalikan dengan bilangan negatif yang sama kemudian membalik tanda ketidaksamaannya.

Contoh 7. Carilah penyelesaian ketaksamaan $5x - 7 < 3x - 2$ dan gambarkan grafik himpunan penyelesaiannya.

Penyelesaian.

$$\begin{aligned} 5x - 7 &< 3x - 2 \\ 5x &< 3x + 5 \qquad \text{(kedua ruas ditambah 7)} \\ 2x &< 5 \qquad \text{(kedua ruas ditambah } -3x\text{)} \\ x &< \frac{5}{2} \qquad \text{(kedua ruas dikali } \tfrac{1}{2}\text{)} \end{aligned}$$

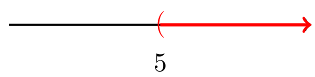
Dengan demikian penyelesaiannnya adalah $\{x : x < \frac{5}{2}\}$. Grafik himpunn penyelesaiannya adalah

Contoh 8. Carilah penyelesaian ketaksamaan $3x + 4 < 5x - 6$.

Penyelesaian.

$$\begin{aligned} 3x + 4 &< 5x - 6 \\ 3x &< 5x - 10 \qquad \text{(setiap ruas ditambah } -4\text{)} \\ -2x &< -10 \qquad \text{(setiap ruas ditambah } -5x\text{)} \\ x &> 5 \qquad \text{(setiap ruas dikali } -\tfrac{1}{2}\text{)} \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa pada baris terakhir, ketaksamaan berubah menjadi $>$, ini dikarenakan perkalian dengan bilangan negatif. Grafik himpunan penyelesaiannya adalah



Contoh 9. Carilah penyelesaian ketaksamaan $-2 < 3x + 4 < 7$.

Penyelesaian. Perhatikan bahwa ada tiga ruas pada ketaksamaan ini.

$$\begin{aligned} -2 < 3x + 4 < 7 & \quad \text{(tambahkan setiap ruas dengan } -4) \\ -6 < 3x < 3 & \quad \text{(kalikan setiap ruas dengan } \tfrac{1}{3}) \\ -2 < x < 1 & \end{aligned}$$

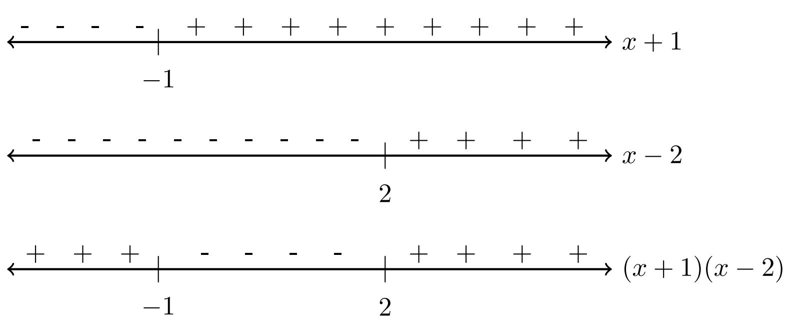
Penyelesaiannya adalah $\{x : -2 < x < 1\}$, atau digambarkan dengan

Contoh 10. Carilah penyelesaian ketaksamaan $x^2 - x < 2$.

Penyelesaian.

$$\begin{aligned} x^2 - x &< 2 \\ x^2 - x - 2 &< 0 \quad \text{(setiap ruas ditambah } -2) \\ (x+1)(x-2) &< 0 \quad \text{(difaktorkan)} \end{aligned}$$

Selanjutnya $(x + 1)(x - 2) = 0$ jika $x = -1$ atau $x = 2$. Untuk mencari penyelesaianya digunakan bantuan grafik berikut.



Cara menentukan tanda + dan − di atas setiap garis tersebut adalah sebagai berikut.

- Garis pertama, untuk $x < -1$ diperoleh $x-1 < 0$ (negatif), sehingga dikiri -1 tandanya $-$. Sedangkan untuk $x > -1$ diperoleh $x - 1 > 0$ (positif), sehingga di kanan -1 tandanya $+$.
- Tanda pada garis kedua diperoleh dengan cara serupa seperti garis pertama

- Tanda untuk garis ketiga diperoleh dengan mengalikan tanda garis pertama dan kedua. Misalnya untuk $-1 < x < 2$, garis pertama bertanda $+$ dan garis kedua bertanda $-$, sehingga hasil kalinya bertanda $-$.

Karena ketaksamaan $x^2 - x < 2$ ekivalen dengan $(x+1)(x-2) < 0$, maka penyelesaiannya adalah segmen garis pada garis ketiga yang bertanda $-$, yaitu $\{x : -1 < x < 2\}$.

---

2 Nilai mutlak bilangan real

Definisi 1. *Nilai mutlak (absolut) bilangan real x dituliskan $|x|$, didefinisikan*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

Berdasarkan definisi 1, nilai mutlak suatu bilangan real merupakan bilangan tidak negatif. Nilai mutlak bilangan real menyatakan panjang garis dari titik 0 ke bilangan real tersebut.

Contoh 11. (a) $|4| = 4$

(b) $|-3| = -(-3) = 3$

(c) $|0| = 0$

(d) $|6-4| = |2| = 2$

(e) $|4-6| = |-2| = -(-2) = 2$

Sifat 1. *(i)* $|ab| = |a||b|$

(ii) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

(iii) $|a+b| \leq |a| + |b|$ *(ketaksamaan segitiga)*

(iv) $|a-b| \geq ||a| - |b||$

Contoh 12. (a) $|2 \cdot (-3)| = |2| \cdot |-3| = 2 \cdot 3 = 6$

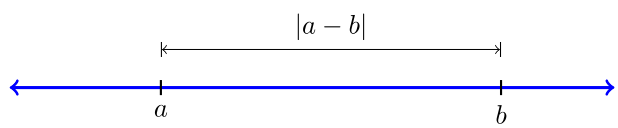
(b) $\left|\frac{-4}{3}\right| = \frac{|-4|}{|3|} = \frac{4}{3}$

(c) $|5 - 3| \leq |5| + |3|$

(d) $|7 - 4| \geq ||7| - |4||$.

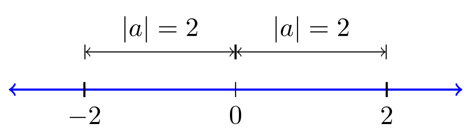
Contoh (c) dan (d) dapat Anda periksa dengan menghitung kedua ruas.

Secara geometris, $|a - b|$ menyatakan jarak antara titik a dengan titik b di garis real. Khusunya $|a|$ menyakanan jarak titik a dengan titik 0, sebab $|a| = |a - 0|$.



Gambar 2: Jarak a dan b adalah $|a - b|$

Sebagai contoh, $|a| = 2$ menyatakan jarak a dengan 0 adalah 2; jadi a bisa bilangan 2 atau -2.



Gambar 3: $|a| = 2$

Diberikan bilangan real a. Ketaksamaan $|x| < a$ menyatakan semua titik-titik x yang jaraknya dari 0 lebih kecil dari a.

Teorema 2. *Untuk* $a > 0$ *berlaku*

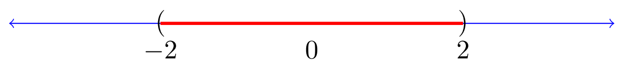
$$|x| < a \iff -a < x < a \tag{2}$$

Contoh 13. Carilah penyelesaian ketaksamaan $|x| < 2$.

Penyelesaian. Di dalam soal ini, akan dicari nilai-nilai x sehingga nilai mutlaknya kurang dari 2. Berdasarkan (2)

$$|x| < 2 \iff -2 < x < 2.$$

Dengan demikian penyelesaiannya adalah interval $(-2, 2) = \{x : -2 < x < 2\}$, yang dapat digambarkan dengan



Contoh 14. Carilah penyelesaian ketaksamaan $|x - 4| < 1$.
Penyelesaian. Berdasarkan (2),

$$\begin{aligned} x - 4 < 1 \quad &\iff -1 < x - 4 < 1 \\ &\iff -1 + 4 < x < 1 + 4 \\ &\iff 3 < x < 5. \end{aligned}$$

Dengan demikian penyelesaiannya adalah interval

$$(3, 5) = \{x : 3 < x < 5\},$$

atau digambarkan dengan

Untuk $a > 0$, pada ketaksamaan $|x| > a$ berarti $x > a$ atau $x < -a$.

Teorema 3. *Untuk $a > 0$ berlaku*

$$|x| > a \iff x < -a \quad \textit{atau} \quad a < x \tag{3}$$

Contoh 15. Carilah penyelesaian ketaksamaan $|x - 2| > 1$.
Penyelesaian. Berdasarkan (3),

$$\begin{aligned} |x - 2| > 1 &\iff x - 2 < -1 \quad \text{atau} \quad 1 < x - 2 \\ &\iff x < 1 \quad \text{atau} \quad 3 < x \end{aligned}$$

Dengan demikian penyelesaiannnya adalah

$$(-\infty, 1) \cup (3, \infty).$$

Tes formatif

1. Berilah tanda $<$, $>$, $\geq$, $\geq$ atau $=$ pada tempat yang disediakan!

   (a) $-3 \cdots 1$
   (b) $\frac{1}{8} \cdots \frac{1}{3}$
   (c) $5 \cdot \frac{1}{5} \cdots 1$
   (d) $(-2) \cdot 39128 \cdots (-2) \cdot 30$
   (e) $(x - 1000)^2 \cdots 0$
   (f) $-3 \cdots 1$
   (g) $\frac{1}{8} \cdots \frac{1}{3}$
   (h) $5 \cdot \frac{1}{5} \cdots 1$

2. Carilah penyelesaian persamaan berikut dan gambarkan intervalnya.

   (a) $|x^2 - 2| = 1$
   (b) $|x - 1| \leq 5$
   (c) $|1 - x| > 1$
   (d) $|1 - x^2| < 1$

3. Carilah penyelesaian ketaksamaan-ketaksamaan berikut dan gambarkan intervalnya.

   (a) $|3x - 5| \geq 1$
   (b) $|4x + 5| \leq 10$
   (c) $|5x - 6| > 1$
   (d) $\left|\frac{x}{4} + 1\right| < 1.$
   (e) $x^2 - 3x - 4 \geq 0$
   (f) $x^2 - 4x + 4 \leq 0$

Tugas Minggu 02

Kerjakan Tes Formatif di atas nomor: 1. (d),(e) dan (g); nomor 2. (b) dan (c); nomor 3. (f).