

# Bilangan Real

April 14, 2026

## 1 Bilangan real dan garis real

Dalam bagian ini akan diperkenalkan himpunan bilangan real beserta operasi jumlahan dan perkalian. Sifat urutan bilangan real diperkenalkan agar bisa dikembangkan pengertian interval. Representasi bilangan real sebagai suatu garis lurus dikembangkan sistem koordinat siku-siku sebagai pasangan bilangan real.

Bilangan real adalah bilangan yang dapat diekspresikan sebagai desimal, misalnya

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= 0,33333 \dots \\ -\frac{3}{4} &= -0,75000 \dots \\ \sqrt{2} &= 1,4142 \dots \\ 2 &= 2,000 \dots\end{aligned}$$

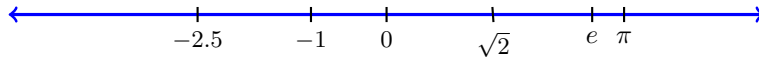
Setiap desimal merepresentasikan satu bilangan real. Sebaliknya, suatu bilangan real bisa memiliki dua representasi desimal, misalnya

$$0,999 \dots \quad \text{dan} \quad 1,000 \dots$$

merupakan representasi bilangan 1. Bilangan real mencakup bilangan-bilangan berikut:

- bilangan asli, yaitu bilangan-bilangan  $1, 2, 3, \dots$ ,
- bilangan bulat (integer), yaitu bilangan-bilangan  $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ ,
- bilangan rasional, yaitu bilangan-bilangan yang dapat dituliskan dengan  $\frac{a}{b}$ , dengan  $a$  dan  $b$  bilangan bulat dan  $b \neq 0$ , misalnya  $\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{3}{7}$  dan sebagainya.
- bilangan irasional, yaitu semua bilangan yang bukan bilangan rasional. Contoh bilangan irasional  $\sqrt{2}$ ,  $\pi = 3,14159265358979 \dots$  dan  $e = 2,71828182845905 \dots$ .

Bilangan real dapat digambarkan sebagai suatu garis yang panjangnya tak hingga. Setiap titik pada garis tersebut menyatakan suatu bilangan real, dan sebaliknya setiap bilangan real dinyatakan oleh suatu titik pada garis tersebut. Selanjutnya garis ini dinamakan **garis real**.



Gambar 1: Garis real =  $\mathbb{R}$

### Penyajian bilangan melalui himpunan

Penyajian bilangan real dapat dilakukan dengan himpunan. Himpunan adalah kumpulan objek-objek yang didefinisikan secara jelas. Objek di dalam himpunan dinamakan **anggota** atau **elemen** himpunan.

Untuk mempersingkat notasi, himpunan dituliskan dengan abjad kapital seperti  $A, B, C$  dan sebagainya; anggota himpunan ditulis dengan abjad seperti  $a, b, c, x, y$  dan sebagainya. Jika  $x$  adalah anggota himpunan  $A$ , maka dituliskan

$$x \in A$$

dan jika  $x$  bukan anggota  $A$ , maka dituliskan

$$x \notin A$$

Untuk menuliskan himpunan yang memuat anggota-anggotanya dapat dilakukan dengan mendaftar semua anggotanya di dalam kurung kurawal  $\{$  dan  $\}$  dan anggota yang berbeda dipisah dengan tanda koma.

**Contoh 1.** (a) Jika  $B$  adalah himpunan semua bilangan bulat positif yang lebih kecil dari 7, maka  $B$  dapat dituliskan

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Jelas bahwa  $3 \in B$ , sedangkan  $-2 \notin B$ . Demikian pula  $\frac{1}{2} \notin B$ .

(b) Jika  $C$  adalah himpunan semua bilangan genap positif yang lebih kecil atau sama dengan 10, maka dapat dituliskan sebagai

$$C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

Selain dengan cara mendaftar semua anggotanya, penulisan himpunan juga bisa dilakukan dengan menuliskan **sifat keanggotaannya**. Dengan cara ini suatu himpunan  $A$  dapat dituliskan sebagai

$$A = \{x : x \text{ bersifat } P\}$$

dan dibaca "A adalah himpunan  $x$  dimana  $x$  bersifat  $P$ ".

**Contoh 2.** Himpunan-himpunan pada Contoh 1 dapat dituliskan sebagai

(a)  $B = \{x : x \text{ lebih kecil } 7, x \text{ bulat positif}\}$

(b)  $C = \{x : x \text{ lebih besar } 0 \text{ lebih kecil sama dengan } 10 \text{ dan } x \text{ genap}\}$

## 2 Operasi pada bilangan real

Pada himpunan bilangan real dikenal dua operasi aljabar, yaitu operasi **jumlahan** dan operasi **perkalian**.

1. **Operasi jumlahan.** Jumlah bilangan real  $a$  dan  $b$  dituliskan  $a + b$ , memenuhi sifat-sifat:

i. Jumlah dua bilangan real adalah bilangan real.

ii.  $a + b = b + a$

iii.  $a + (b + c) = (a + b) + c$

iv.  $a + 0 = 0 + a = a$

v. Negatif dari  $a$  ditulis  $-a$  dan berlaku  $a + (-a) = 0$

Sifat (1.i) menyatakan bahwa operasi jumlahan bersifat tertutup; sifat 1.(ii) dinamakan sifat komutatif yang menyatakan bahwa pada operasi penjumlahan bisa diubah urutannya. Bilangan 0 dinamakan elemen **identitas** operasi jumlahan. Bilangan  $-a$  pada sifat (1.v) dinamakan **invers**  $a$  terhadap operasi jumlahan dan dibaca **negatif**  $a$  atau **minus**  $a$ .

Bilangan  $a$  ditambah negatif  $b$ ,  $a + (-b)$  ditulis  $a - b$  dan dibaca  $a$  dikurangi  $b$ , dengan kata lain,  $a - b$  adalah  $a$  ditambah negatif  $b$ ; jadi

$$a - b = a + (-b).$$

Di dalam matematika, operasi yang berada di antara kurung buka ”(” dan kurung tutup ”)” dilaksanakan terlebih dahulu. Misalnya  $2 + (6 + 7)$  maksudnya adalah dihitung terlebih dahulu  $6 + 7$  kemudian hasilnya ditambah dengan 2.

- Contoh 3.** (a)  $2 + 5 = 5 + 2 = 7$ .  
 (b)  $7 + (3 + 19) = (7 + 3) + 19 = 10 + 19 = 29$ .  
 (c)  $6 + 0 = 0 + 6 = 6$ .  
 (d)  $5 - 5 = 5 + (-5) = 0$ .  
 (e)  $9 - 4 = 5 + 4 - 4 = 5 + (4 - 4) = 5 + 0 = 5$ .

2. **Operasi perkalian.** Perkalian bilangan  $a$  dan  $b$  dituliskan  $a \cdot b$  atau  $ab$ , memenuhi sifat-sifat:

- i. Hasil kali dua bilangan real adalah bilangan real.
- ii.  $a \cdot b = b \cdot a$
- iii.  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- iv.  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
- v. Jika  $a \neq 0$ , maka ada bilangan real  $a^{-1}$  sehingga berlaku  $a \cdot a^{-1} = 1$ .

Sifat (2.i) menyatakan bahwa operasi perkalian bilangan real adalah tertutup, sifat (2.ii) dinamakan sifat komutatif, sifat (2.iii) dinamakan sifat distributif. Bilangan 1 pada (2.iv) dinamakan elemen **identitas** operasi perkalian, sedangkan  $a^{-1}$  pada (2.v) dinamakan **invers**  $a$  terhadap operasi perkalian. Perhatikan bahwa bilangan 0 tidak memiliki invers terhadap operasi perkalian, yang berarti  $0^{-1}$  tidak ada.

Invers dari  $a$  sering ditulis  $1/a$ , yakni

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Dengan demikian, jika  $b \neq 0$  maka dapat dituliskan dengan

$$a \cdot b^{-1} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

dan ruas terakhir dibaca  $a$  **dibagi**  $b$ . Dengan demikian membagi suatu bilangan dengan bilangan  $b$  sama dengan mengalikan bilangan tersebut dengan bilangan  $1/b$ . Selain dengan notasi  $\cdot$ , operasi perkalian sering ditulis tanpa notasi tersebut, jadi  $a \cdot b$  juga dituliskan  $ab$ .

- Contoh 4.** (a)  $3 \cdot 5 = 15$ .  
 (b)  $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ .  
 (c)  $10 = 5 \cdot 2$ .  
 (d)  $10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \cdot (2 \cdot \frac{1}{2}) = 5 \cdot 1 = 5$

Berdasarkan sifat-sifat operasi jumlahan dan perkalian, diperoleh sifat-sifat berikut.

## Sifat-sifat operasi jumlahan dan perkalian

Diberikan bilangan-bilangan real  $a, b, c$ . Berlaku sifat-sifat berikut.

- i. Sifat distributif:  $a(b + c) = ab + ac$ .
- ii.  $(-a) \cdot b = -(ab)$ , khususnya  $(-1) \cdot (b) = -b$ .
- iii.  $(-a) \cdot (-b) = ab$ .
- iv.  $-(a + b) = -a - b$ .
- v.  $-(-a) = a$

**Contoh 5.** (a)  $4 \cdot (-3) = -(4 \cdot 3) = -12$ .

(b)  $(-3) \cdot (-5) = 3 \cdot 5 = 15$ .

(c)  $3 - 7 = 3 - (3 + 4) = 3 - 3 - 4 = (3 - 3) - 4 = 0 - 4 = 0 + (-4) = -4$ .

(d)  $(9 \cdot 3) + (9 \cdot 7) = 9 \cdot (3 + 7) = 9 \cdot 10 = 90$ .

(e)  $-(-2) = 2$  dan  $-(-(-5)) = -5$ .

## Penyelesaian persamaan

Bilangan yang jika dimasukkan ke dalam suatu persamaan menjadikan persamaan tersebut benar dinamakan **penyelesaian**.

Aturan mencari penyelesaian persamaan:

- (1) Jika  $a + x = b$  maka  $x = b - a$
- (2) Jika  $a \cdot x = b$  maka  $x = \frac{b}{a}$  dengan  $a \neq 0$ .

**Contoh 6.** Carilah penyelesaian persamaan berikut.

(a)  $5 + x = 9$

(b)  $3 \cdot y = 12$

(c)  $3x - 12 = 0$ .

**Penyelesaian.** (a) Penyelesaian persamaan  $5 + x = 9$  adalah

$$x = 9 - 5 = 4.$$

(b) Penyelesaian persamaan  $3 \cdot y = 12$  adalah

$$y = \frac{12}{3} = 4.$$

(c) Penyelesaian persamaan  $3x - 12 = 0$  dapat dicari melalui langkah-langkah berikut:

$$\begin{aligned} 3x - 12 &= 0 \\ 3x &= 12 && \text{(tambahkan kedua ruas dengan 12)} \\ x &= \frac{12}{3} && \text{(bagi kedua ruas dengan 3)} \\ &= 4. \end{aligned}$$

Dengan demikian penyelesaian persamaan ini adalah  $x = 4$ .

Operasi jumlahan dan perkalian pada bilangan real dapat dikembangkan menjadi operasi yang lebih kompleks.

### Pangkat bulat bilangan real

Diketahui  $a$  bilangan real dan  $n$  bilangan bulat tidak negatif. Bilangan  $a$  dikalikan dengan dirinya sendiri sebanyak  $n$  kali, yakni

$$\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ kali}}$$

Untuk bilangan bulat tak negatif  $n$  didefinisikan

$$\begin{aligned} a^n &= a \cdot a \cdots a, \\ a^0 &= 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Bilangan  $a^n$  dibaca  $a$  pangkat  $n$ .

**Contoh 7.** (a)  $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ .

(b)  $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$ .

(c)  $17^0 = 1$ .

(d)  $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ .

(e)  $(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$ .

(f)  $(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$ .

(g)  $-1^2 = -(1^2) = -1$ .

Jika  $a \neq 0$  dan  $n$  bilangan bulat tidak negatif, maka

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (2)$$

**Contoh 8.** (a)  $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ .

(b)  $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$ .

(c)  $3 \cdot 2^{-4} = 3 \cdot \frac{1}{2^4} = 3 \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$ .

### Akar bilangan real

Jika  $x$  bilangan real dan  $n$  bilangan bulat, maka akar  $n$  dari  $x$  dituliskan  $\sqrt[n]{x}$  atau  $x^{\frac{1}{n}}$ , didefinisikan

$$\sqrt[n]{x} = y \quad \text{jika dan hanya jika} \quad y^n = x. \quad (3)$$

Akar 2 dari  $x$  biasa dituliskan  $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$ .

**Contoh 9.** (a)  $\sqrt{9} = 3$ , sebab  $3^2 = 9$ .

(b)  $\sqrt[5]{32} = 2$ , sebab  $2^5 = 32$ .

(c)  $\sqrt[4]{81} = 3$ , sebab  $3^4 = 81$ .

(d)  $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$ , sebab  $4^2 = 16$ .

(e)  $64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$ , sebab  $4^3 = 64$ .

Jika  $m$  dan  $n$  bilangan bulat dengan  $n \neq 0$ , maka

$$x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \quad (4)$$

**Contoh 10.**

$$4^{\frac{3}{2}} = (4^3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4^3} = \sqrt{64} = 8.$$

Jika  $p$  dan  $q$  bilangan rasional, maka berlaku

(i)  $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

(ii)  $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

(iii)  $a^p \cdot b^p = (ab)^p$

**Contoh 11.** (a)  $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{2}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{5}{2}} = 2^3 = 8$

(b)  $\frac{5^3}{5^2} = 5^{3-2} = 5.$

(c)  $3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 5)^2 = 15^2 = 225.$

(d)  $\frac{6^2}{2^3} = \frac{(2 \cdot 3)^2}{2^3} = \frac{2^2 \cdot 3^2}{2^3} = \frac{3^2}{2} = \frac{9}{2}.$

### Kuadrat jumlah dua bilangan

Dengan menerapkan sifat distributif,

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= a(a + b) + b(a + b) \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2.\end{aligned}$$

Jadi berlaku

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Dengan menerapkan hasil tersebut untuk  $a = x$  dan  $b = -y$ , diperoleh

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

**Contoh 12.** Uraikan ekspresi  $(x + y - z)^2$ .

*Penyelesaian.*

$$\begin{aligned}(x + y - z)^2 &= [(x + y) - z]^2 \\ &= (x + y)^2 - 2(x + y)z + z^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 - 2xz - 2yz + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz.\end{aligned}$$

**Contoh 13.** Uraikan ekspresi  $(x + 2)^3$ .

*Penyelesaian.*

$$\begin{aligned}(x + 2)^3 &= (x + 2)(x + 2)^2 \\ &= (x + 2)(x^2 + 2x + 4) \\ &= x(x^2 + 2x + 4) + 2(x^2 + 2x + 4) \\ &= x^3 + 2x^2 + 4x + 2x^2 + 4x + 8 \\ &= x^3 + 4x^2 + 4x + 8.\end{aligned}$$

**Contoh 14.** Uraikan ekspresi  $(2x - 1)^2$ .

*Penyelesaian.*

$$\begin{aligned}(2x - 1)^2 &= (2x)^2 - 2(2x)(-1) + (-1)^2 \\ &= 4x^2 - 4x + 1.\end{aligned}$$

**Contoh 15.** Uraikan ekspresi  $\left(\frac{x}{3} - 2\right)^2$ .

*Penyelesaian.*

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{3} - 2\right)^2 &= \left(\frac{x}{3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{x}{3}(-2) + (-2)^2 \\ &= \frac{x^2}{9} - \frac{4}{3}x + 4.\end{aligned}$$

### Mencari faktor persamaan kuadrat

Persamaan berbentuk  $x^2 + bx + c = d$  dengan  $b, c$  dan  $d$  konstanta, dinamakan persamaan kuadrat. Misalkan bentuk kuadrat  $x^2 + bx + c$  dapat difaktorkan menjadi  $(x + s)(x + t)$ . Ini berarti

$$\begin{aligned}x^2 + bx + c &= (x + s)(x + t) \\ &= x(x + t) + s(x + t) \\ &= x^2 + tx + sx + st \\ &= x^2 + (s + t)x + st,\end{aligned}$$

Dengan membandingkan koefisien-koefisien ruas pertama dan terakhir diperoleh

$$b = s + t \quad \text{dan} \quad c = st.$$

**Contoh 16.** Faktorkan  $x^2 + 4x + 3$ .

*Penyelesaian.* Dari persamaan ini,  $s + t = 4$  dan  $st = 3$ . Oleh karena itu  $s = 1$  dan  $t = 3$ . Dengan demikian

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3).$$

**Contoh 17.** Faktorkan  $x^2 - 5x + 6$ .

*Penyelesaian.* Disini  $s + t = -5$  dan  $st = 6$ . Oleh karena itu  $s = -2$  dan  $t = -3$ . Dengan demikian

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

## Mencari penyelesaian persamaan kuadrat

**Contoh 18.** Carilah penyelesaian persamaan  $x^2 - 4x + 3 = 0$ .

*Penyelesaian.* Perhatikan bahwa

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3).$$

Oleh karena itu

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \iff (x - 1)(x - 3) = 0.$$

Persamaan  $(x - 1)(x - 3) = 0$  jika

$$x - 1 = 0 \quad \text{atau} \quad x - 3 = 0.$$

Dengan demikian penyelesaiannya adalah  $x = 1$  atau  $x = 3$ .

Di dalam contoh di atas, notasi  $\iff$  dibaca "jika dan hanya jika", yang berarti kedua persamaan "ekivalen" atau "sama saja".

**Contoh 19.** Carilah penyelesaian persamaan  $x^2 - 9 = 0$ .

*Penyelesaian.* Perhatikan bahwa  $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$ . Oleh karena itu

$$x^2 - 9 = 0 \iff (x + 3)(x - 3) = 0.$$

Jadi penyelesaiannya adalah  $x = -3$  atau  $x = 3$ .

**Contoh 20.** Carilah penyelesaian persamaan  $3x^2 + 3x - 6 = 0$ .

*Penyelesaian.* Perhatikan bahwa  $3x^2 + 3x - 6 = (3x - 3)(x + 2)$ . Oleh karena itu

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3x - 6 = 0 &\iff (3x - 3)(x + 2) = 0 \\ &\iff 3x - 3 = 0 \quad \text{atau} \quad x + 2 = 0. \end{aligned}$$

Dengan demikian penyelesaiannya adalah  $x = 1$  atau  $x = -2$ .

## Menyederhanakan

**Contoh 21.** Ubahlah yang berikut menjadi bentuk yang paling sederhana

(a)  $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ .

(b)  $\frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2}$ .

$$(c) \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{(x - 1)^2}$$

*Penyelesaian.* (a)  $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2.$

$$(b) \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} = \frac{(x - 4)(x - 2)}{x - 2} = x - 4.$$

$$(c) \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{(x - 1)^2} = \frac{(x - 1)^3}{(x - 1)^2} = x - 1.$$

### Tes formatif

1. Tuliskan dalam bentuk  $a^b$ :

$$(a) \frac{1}{x^3}$$

$$(b) \frac{3}{t^5}$$

$$(c) \frac{1}{a^{-x}} + \frac{2}{b^y}$$

$$(d) \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^{1/3}}$$

2. Sederhanakan

$$(a) 2^{-2} \cdot 4^3 =$$

$$(b) \frac{3^{19}}{9^5} =$$

$$(c) 10^3 \cdot 5^4 =$$

$$(d) 5^7 \cdot \frac{2}{10^2} =$$

3. Tuliskan dalam bentuk  $\sqrt[n]{x^m}$

$$(a) 4^{\frac{2}{3}}$$

$$(b) 7^{-\frac{3}{5}}$$

$$(c) 10^{0,9}$$

$$(d) 100^{0,6}$$

4. Carilah penyelesaian persamaan berikut.

$$(a) 2x - 6 = 0$$

$$(b) \frac{2x}{3} + 8 = 0$$

(c)  $5y + 2 = 8$

(d)  $-3x + 5 = 2$

5. Sederhanakan bentuk berikut.

(a)  $\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

(b)  $\frac{2x^2 - 8}{x + 2}$

(c)  $\frac{x^3 - x}{x(x + 1)}$

(d)  $\frac{x^2 - 3x - 10}{x - 5}$

6. Carilah penyelesaian persamaan kuadrat berikut.

(a)  $x^2 - 7x - 18 = 0$

(b)  $x^2 - 2x + \frac{3}{4}$

(c)  $x^2 + 2x = 15$

(d)  $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} = 0$