Statistika dan Probabilitas
Materi 07: **Variabel Random Diskrit**

Haryadi
haryadi_ump@yahoo.co.id

Universitas Muhammadiyah Palangka Raya
May 27, 2024

Dalam suatu eksperimen random dapat terjadi peneliti tidak tertarik pada outcomenya tetapi barangkali lebih tertarik pada nilai numerik yang berkaitan dengan outcome tersebut. Misalnya dalam percobaan melontarkan tiga mata uang, mungkin peneliti lebih tertarik untuk mengamati banyaknya suatu sisi terjadi dari pada mengamati sisi apa saja yang menghadap ke atas.

Definisi 1. Variabel random *adalah suatu fungsi yang domainnya ruang sampel dan nilainya bilangan real. Selanjutnya variabel random dituliskan dengan notasi X. Jika c adalah peristiwa elementer, maka nilai variabel random X di c dituliskan $X(c)$. Jika nilai $X(c)$ adalah x maka dituliskan $X(c) = x$.*

Contoh 1. Dua mata uang logam dilontarkan satu kali. Ruang sampelnya adalah

$$S = \{aa, ag, ga, gg\}.$$

Jika X menyatakan banyaknya sisi a terjadi, maka X merupakan variabel random. Nilai variabel random pada setiap peristiwa elementer adalah:

$$X(gg) = 0, \quad X(ag) = 1, \quad X(ga) = 1, \quad X(aa) = 2.$$

Variabel random X dinamakan **diskrit** jika nilai variabel random tersebut terhitung, yakni banyaknya nilai berhingga atau dapat dituliskan sebagai

$$x_1, x_2, x_3, \cdots .$$

Pada Contoh 1, X merupakan variabel random diskrit.

Contoh 2. Tiga mata uang dilontarkan satu kali. Jika variabel random X menyatakan banyaknya sisi angka terjadi, maka nilai-nilai X adalah

$$\begin{aligned} X(ggg) &= 0 \qquad X(agg) = X(gag) = X(gga) = 1 \\ X(aaa) &= 3 \qquad X(aag) = X(aga) = X(gaa) = 2 \end{aligned}$$

Contoh 3. Dua dadu dilontarkan satu kali. Variabel random X menyatakan banyaknya jumlah spot kedua sisi yang menghadap ke atas. Nilai-nilai variabel random X aadalah

$$\begin{array}{lll}
X((1,1)) = 2 & X((1,2)) = 3 & X((1,3)) = 4 \\
X((1,4)) = 5 & X((1,5)) = 6 & X((1,6)) = 7 \\
X((2,1)) = 3 & X((2,2)) = 4 & X((2,3)) = 5 \\
X((2,4)) = 6 & X((2,5)) = 7 & X((2,6)) = 8 \\
X((3,1)) = 3 & X((3,2)) = 5 & X((3,3)) = 6 \\
X((3,4)) = 7 & X((3,5)) = 8 & X((3,6)) = 9 \\
X((4,1)) = 5 & X((4,2)) = 6 & X((4,3)) = 7 \\
X((4,4)) = 8 & X((4,5)) = 9 & X((4,6)) = 10 \\
X((5,1)) = 6 & X((5,2)) = 7 & X((5,3)) = 8 \\
X((5,4)) = 9 & X((5,5)) = 10 & X((5,6)) = 11 \\
X((6,1)) = 7 & X((6,2)) = 8 & X((6,3)) = 9 \\
X((6,4)) = 10 & X((6,5)) = 11 & X((6,6)) = 12.
\end{array}$$

Jika X variabel random diskrit, maka peluang variabel random X bernilai x dituliskan $P(X = x)$. Pada Contoh 2 misalnya, variabel random X bernilai

2 jika dan hanya jika peristiwa $\{aag\}, \{aga\}$ dan $\{gaa\}$ terjadi. Ini berarti peluang $X = 2$ sama dengan peluang terjadinya peristiwa $\{aag, aga, gaa\}$, yaitu

$$P(X = 2) = P(\{aag, aga, gaa\}) = \frac{3}{8}.$$

Perhatikan bahwa nilai $P(X = x)$ tergantung pada peristiwa yang dikaitkan dengan nilai variabel random x. Dengan demikian peluang variabel random X bergantung pada nilai x, dengan kata lain $P(X = x)$ merupakan fungsi dari x.

Definisi 2. *Diberikan variabel random diskrit X. Fungsi*

$$f(x) = P(X = x) \tag{1}$$

dinamakan **fungsi peluang** *atau* ***distribusi peluang*** *variabel random X.*

Contoh 4. Carilah distribusi peluang variabel random pada Contoh 1 jika setiap peristiwa elementer memiliki peluang sama.

Penyelesaian. Ruang sampelnya adalah

$$S = \{aa, ag, ga, gg\}$$

yang anggota berjumlah 4, sehingga peluang setiap peristiwa elementer adalah $\frac{1}{4}$. Variabel random X menyatakan banyaknya sisi a terjadi, oleh karena itu

Peristiwa	aa	ag	ga	gg
Nilai $X = x_i$	2	1	1	0

Dengan demikian fungsi distribusi percobaan ini adalah

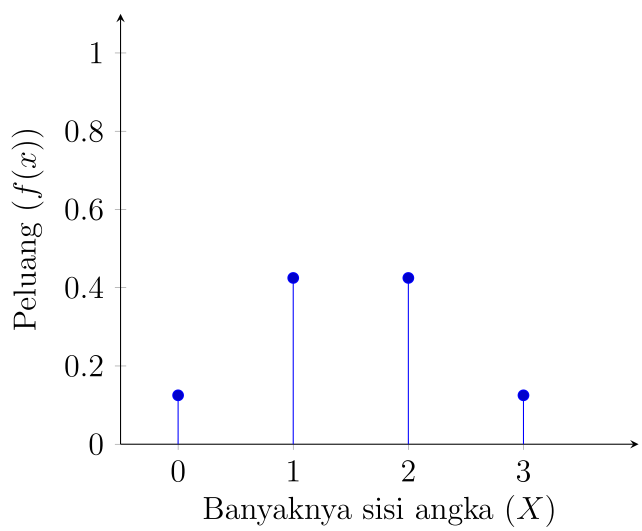
$$\begin{aligned} f(0) &= P(X = 0) = P(gg) = \frac{1}{4} \\ f(1) &= P(X = 1) = P(ag, ga) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ f(2) &= P(X = 2) = P(aa) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Contoh 5. Carilah distibusi peluang variabel random pada Contoh 2 jika setiap peristiwa elementer memiliki peluang sama.

Penyelesaian. Ruang sampelnya memiliki 8 anggota, oleh karena itu peluang setiap peristiwa elementer adalah $\frac{1}{8}$. Dengan demikian distribusi peluangnya adalah

$$\begin{aligned} f(0) &= P(X=0) = P(ggg) = \tfrac{1}{8} \\ f(1) &= P(X=1) = P(agg, gag, gga) = \tfrac{3}{8} \\ f(2) &= P(X=2) = P(aag, aga, gaa) = \tfrac{3}{8} \\ f(3) &= P(X=3) = P(aaa) = \tfrac{1}{8} \end{aligned}$$

Grafik distribusi peluangnya dapat dinyatakan dengan gambar berikut.

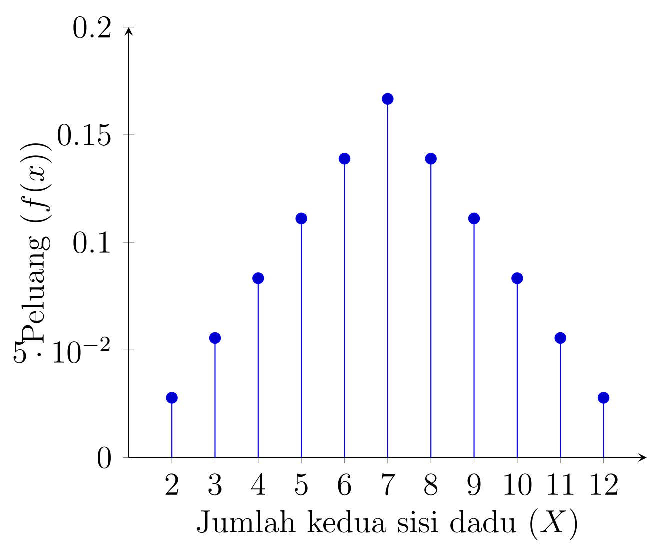


Gambar 1: Distribusi peluang

Contoh 6. Pada Contoh 3, distribusi peluangnya adalah

$$\begin{aligned}
f(2) &= P(X=2) = P((1,1)) = \tfrac{1}{36} \\
f(3) &= P(X=3) = P((1,2)(2,1)) = \tfrac{2}{36} \\
f(4) &= P(X=4) = P((1,3),(2,2),(3,1)) = \tfrac{3}{36} \\
f(5) &= P(X=5) = P((1,4),(2,3),(3,2),(4,1)) = \tfrac{4}{36} \\
f(6) &= P(X=6) = P((1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)) = \tfrac{5}{36} \\
f(7) &= P(X=7) = P((1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)) = \tfrac{6}{36} \\
f(8) &= P(X=8) = P((2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)) = \tfrac{5}{36} \\
f(9) &= P(X=9) = P((3,6),(4,5),(5,4),(6,3)) = \tfrac{4}{36} \\
f(10) &= P(X=10) = P((4,6),(5,5),(6,4)) = \tfrac{3}{36} \\
f(11) &= P(X=11) = P((5,6),(6,5)) = \tfrac{2}{36} \\
f(12) &= P(X=12) = P((6,6)) = \tfrac{1}{36}
\end{aligned}$$

Grafik fungsi peluangnya disajikan pada Gambar 2.



Gambar 2: Distribusi peluang jumlah kedua sisi dadu

Diberikan ruang sampel S dan X variabel random diskrit pada S dengan nilai-nilai $x_1, x_2, \cdots$. Karena S merupakan union semua peristiwa elementer, maka

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = P(S) = 1. \tag{2}$$

Sebagai ilustrasi persamaan (2), dapat Anda periksa pada Contoh 4,

$$\sum_{i=1}^{3} f(x_i) = f(0) + f(1) + f(2) = 1,$$

pada Contoh 5

$$\sum_{i=1}^{4} f(x_i) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1,$$

dan pada Contoh 6

$$\sum_{i=1}^{11} f(x_i) = f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(11) = 1.$$

Definisi 3. Distribusi kumulatif *atau fungsi distribusi, dituliskan $F(x)$, adalah peluang variabel random X bernilai lebih kecil atau sama dengan x, yakni*

$$F(x) = P(X \leq x). \tag{3}$$

Contoh 7. Perhatikan kembali Contoh 2. Distribusi kumulatifnya adalah

$$\begin{aligned}
F(0) &= P(x \leq 0) = P(X = 0) = \tfrac{1}{8} \\
F(1) &= P(x \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \tfrac{1}{2} \\
F(2) &= P(x \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \tfrac{7}{8} \\
F(3) &= P(x \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1
\end{aligned}$$

Contoh 8. Distribusi kumulatif pada Contoh 3 adalah

$$
\begin{aligned}
F(2) &= P(x \le 2) = P(X=2) = \tfrac{1}{36} \\
F(3) &= P(x \le 3) = P(X=2) + P(X=3) = \tfrac{3}{36} \\
F(4) &= P(x \le 4) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = \tfrac{6}{36} \\
F(5) &= P(x \le 5) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = \tfrac{10}{36} \\
F(6) &= P(x \le 6) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) \\
&= \tfrac{15}{36} \\
F(7) &= P(x \le 7) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) \\
& \quad + P(X=7) = \tfrac{21}{36} \\
F(8) &= P(x \le 8) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) \\
& \quad + P(X=7) + P(X=8) = \\
& \quad \tfrac{26}{36} \\
F(9) &= P(x \le 9) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) \\
& \quad + P(X=7) + P(X=8) + P(X=9) = \tfrac{30}{36} \\
F(10) &= P(x \le 10) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) \\
& \quad + P(X=7) + P(X=8) + P(X=9) + P(X=10) = \tfrac{33}{36} \\
F(11) &= P(x \le 11) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) \\
& \quad + P(X=7) + P(X=8) + P(X=9) + P(X=10) + P(X=11) = \tfrac{35}{36} \\
F(12) &= P(x \le 12) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) \\
& \quad + P(X=7) + P(X=8) + P(X=9) + P(X=10) + P(X=11) + P(X=12) \\
& \quad = \tfrac{36}{36} = 1.
\end{aligned}
$$

Nilai Harapan Variabel Random Diskrit

Nilai harapan suatu variabel random menggambarkan nilai yang diharapkan akan terjadi dari suatu eksperimen random atau kecenderungan hasil yang akan terjadi.

Definisi 4. *Nilai harapan suatu variabel random diskrit dituliskan $E(X)$ atau μ, didefinisikan sebagai berikut*

$$\mu = E(X) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i).$$

Contoh 9. Dua mata uang logam dilontarkan satu kali dan peluang setiap peristiwa elementer sama. Jika variabel random X menyatakan banyaknya sisi angka terjadi, carilah $E(X)$.

Penyelesaian. Telah diperoleh di dalam Contoh 4 bahwa

$$f(0) = \frac{1}{4}, \quad f(1) = \frac{1}{2}, \quad f(2) = \frac{1}{4}.$$

Dengan demikian nilai harapannya adalah

$$\begin{aligned} \mu = E(X) &= 0 \cdot f(0) + 1 \cdot f(1) + 2 \cdot f(2) \\ &= 0 \cdot \tfrac{1}{4} + 1 \cdot \tfrac{1}{2} + 2 \cdot \tfrac{1}{4} = 1. \end{aligned}$$

Teorema 1. *Diberikan variabel random diskrit X dan c konstanta. Berlaku*

(a) $E(c) = c$.

(b) $E(cX) = cE(X)$

(c) $E(X + cX) = E(X) + cE(X)$.

Bukti. (a) Berdasarkan definisi nilai harapan dengan $x_i = c$ untuk setiap i,

$$\begin{aligned} E(c) &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(= x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} c f(x_i) \\ &= c \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) \\ &= c \cdot 1 = c. \end{aligned}$$

(b) Jika c konstan maka

$$\begin{aligned} E(cX) &= \sum_{i=1}^{\infty} c x_i f(x_i) \\ &= c \sum_{i=1}^{\infty} x f(x_i) \\ &= cE(X). \end{aligned}$$

(c) Dengan mengganti X dengan $X + cX$ pada Definisi 4,

$$\begin{aligned} E(X + cX) &= \sum_{i=1}^{\infty} (x_i + c x_i) f(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i) + \sum_{i=1}^{\infty} c x_i f(x_i) \\ &= E(X) + cE(X) \end{aligned}$$

□

Contoh 10. Diketahui variabel random diskrit X dengan distribusi sebagai berikut:

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Carilah:

(a) $E(X)$

(b) $E(3X)$

(c) $E(X + 2X)$

(d) $E(X^2)$

Penyelesaian. (a) $E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot f(x_i) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$

(b) $E(3X) = 3E(X) = 3 \cdot \frac{9}{8} = \frac{27}{8}$

(c) $E(X + 3X) = E(X) + 3E(X) = \frac{9}{8} + \frac{27}{8} = \frac{9}{2}$

(d) $E(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \cdot f(x_i) = 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{17}{8}$.

Karena μ adalah nilai harapan variabel random X, maka $X - \mu$ merupakan deviasi X terhadap nilai harapannya. Ukuran yang menggambarkan variabilitas suatu variabel random didefinisikan berikut.

Definisi 5. Varian *variabel random diskrit* X *dituliskan* $Var(X)$ *atau* σ^2 *adalah*

$$\sigma^2 = Var(X) = E((X - \mu)^2) = \sum (x_i - \mu)^2 \cdot f(x_i),$$

Kuantitas $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ *dinamakan* **deviasi standar**.

Berdasarkan definisi di atas, $Var(X)$ merupakan nilai harapan kuadrat deviasi $X - \mu$; dengan demikian $Var(X) \geq 0$. Semakin besar varian suatu variabel random, semakin basar variabilitasnya. Nilai varian suatu variabel random adalah 0 jika dan hanya jika variabel random tersebut nilainya tetap.

Contoh 11. Varian pada Contoh 1 di atas adalah

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= (0-1)^2 \cdot f(0) + (1-1)^2 \cdot f(1) + (2-1)^2 \cdot f(2) \\ &= \tfrac{1}{4} + 0 + 1 \cdot \tfrac{1}{4} = 0.5, \end{aligned}$$

sehingga deviasi standarnya adalah $\sigma = \sqrt{0.5} = 0.7$.

Teorema 2. *Jika X variabel random diskrit maka*

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2. \tag{4}$$

Bukti.

$$\begin{aligned} Var(X) &= E((X-\mu)^2) \\ &= E(X^2 - 2X\mu + \mu^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + E(\mu^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= E(X^2) - \mu^2. \end{aligned}$$

□

Contoh 12. Tiga mata uang logam dilintarkan satu kali. Variabel random X menyatakan benyaknya sisi angka terjadi dan dianggap setiap peristiwa elementer memiliki peluang sama. Carilah $Var(X)$.

Penyelesaian. Telah diperoleh pada Contoh 5 hasil berikut

$$f(0) = \frac{1}{8}, \quad f(1) = \frac{3}{8}, \quad f(2) = \frac{3}{8}, \quad f(3) = \frac{1}{8}.$$

Dari sini dapat dihitung

$$\mu = E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} = 3$$

Dengan menggunakan Teorem 2,

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$